Vollständige Induktion

Beispiel 1

Für alle natürlichen Zahlen x $(x \neq 1)$ und n gilt: $A(n)$ $x^n - 1$ ist durch $x-1$ ohne Rest teilbar.

Bew

① Verankerung $n = 1$

$A(1)$: $x^1 - 1 = x - 1$ ist durch $x-1$ teilbar

② Induktionsannahme: Annahme, es gibt ein n für das die Aussage $A(n)$ richtig ist.

$A(n)$: $x^n - 1$ ist durch $x-1$ ohne Rest teilbar.

$A(n+1)$: $x^{n+1} - 1$ ist durch $x-1$ ohne Rest teilbar.

③ Schluss von n auf $n+1$.

$x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$

ist nach Induktions-annahme durch $x-1$ teilbar — das sowieso

Da beide Summanden durch $x-1$ teilbar sind ist die Summe auch durch $x-1$ teilbar

Beispiel 2

Wenn n eine natürliche Zahl und $1+x>0$ dann gilt die Abschätzung

$(1+x)^n \geq 1+nx$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

1)

Verankerung $A(1)$

$(1+x)^1 = 1+x \geq 1+1\cdot x$

2) Induktionsannahme: Wir an, die Abschätzung gilt für ein n

$A(n+1)$: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

3) Schluss von n auf $n+1$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Beispiel 3

Für alle n, x, y $(x>y)$ ist $x^{n+1}+x^n y - xy^n - y^{n+1}$ durch $x-y$ ohne Rest teilbar.

$x^{n+1}+x^n y - xy^n - y^{n+1}$ ist durch $x-y$ ohne Rest teilbar!

Beispiel 4

Sei f eine Funktion mit $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ dann ist $f'(x) = n x^{n-1}$

1, $f(x)=x^n$; $f'(x)=nx^{n-1}$

1 Verankerung $A(1)$ $f(x)=x$ $f'(x)=1\cdot x^{1-1}=1x^0=1$

2 Annahme

$f(x)=x^n$ $f'(x)=n\,x^{n-1}$

$A(n+1)$: $f(x)=x^{n+1} \Rightarrow f'(x)=(n+1)\,x^n$

3 Schluß von $n \to n+1$

Induktionsannahme

$(x^{n+1})'=(x^n\cdot x)'=(x^n)'x+x^n\cdot 1=\underline{nx^{n-1}x}+x^n=nx^n+x^n=(n+1)x^n$ ∎